BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** **2006**

ВЫПУКЛАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА ОТ ОБЛАСТИ

Ю.С.ГАСЫМОВ

Институт Прикладной Математики, БГУ

В работе рассматривается задача на собственные значения для стационарного оператора Шредингера. Область задания оператора предполагается переменной и собственное значение рассмотренной задачи исследуется как функционал, зависящий от области. Получены результаты, относящиеся к выпуклой зависимости собственных значений от области.

Изучение зависимости собственных значений операторов от области представляет как теоретический, так и практический интерес, так как, механические характеристики многих физических систем на самом деле являются собственными значениями соответствующих операторов. Например, собственная частота пластины и мембраны, при поперечных колебаниях, есть собственные значения операторов $Lu = -\Delta^2 u$, $Lu = -\Delta u$, соответственно [1]. Как мы покажем в дальнейшем, собственные значения можно рассматривать как функционалы, зависящие от области. Таким образом, изучение зависимости физических характеристик можно приводить к изучению функционалов от области. Учитывая то, что выпуклость функционала дает довольно насыщенную информацию о его экстремальных свойствах, в данной работе мы будем исследовать выпуклую зависимость собственных значений стационарного уравнения Шредингера от области.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения

$$-\Delta u(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in D, \tag{1}$$

$$u(\xi) = 0, \qquad \xi \in S_D, \tag{2}$$

где D – ограниченная выпуклая область из R^n, $S_D \in C^2$ -ее граница, $q(x)$ -дифференцируемая неотрицательная функция на D.

При этих условиях собственные функции $u_j(x)$ задачи (1), (2) принадлежат классу $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, а собственные значения λ_j – положительны и могут быть пронумерованы в порядке возрастания с учетом их кратности $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ [2].

Множество выпуклых ограниченных областей $D \subset R^n$ обозначим через M. Пусть

$$K = \{D \in M,\ S_D \in C^2\}.$$

Известно [3], что для каждого фиксированного $D \in K$ собственное значение λ_j задачи (1), (2) вычисляется по формуле

$$\lambda_j = \inf I(u, D),\ (u, u_p) = 0,\ p = \overline{1, j-1},$$

где

$$I(u, D) = \frac{\int_D \left[\left|\nabla u(x)\right|^2 + q(x)u^2(x)\right]dx}{\int_D u^2(x)dx}.$$

Таким образом, мы можем рассматривать λ_j как функционал по $D \in K$ и обозначить $\lambda_j(D)$.

Приведем следующие определения:

Функционал $\lambda_j(D)$ называется выпуклым, если для любых $D_1, D_2 \in K$ и $\alpha \in [0,1]$ выполняется

$$\lambda_j(\alpha D_1 + (1-\alpha)D_2) \le \alpha\lambda_j(D_1) + (1-\alpha)\lambda_j(D_2). \qquad (3)$$

Если для любых $D_1, D_2 \in K$ и $\alpha \in [0,1]$ верно соотношение

$$\lambda_j(\alpha D_1 + (1-\alpha)D_2) \le \max\{\lambda_j(D_1), \lambda_j(D_2)\}, \qquad (4)$$

то $\lambda_j(D)$ называется квазивыпуклым.

Здесь $D_1 + D_2$ понимается в смысле Минковского, т.е.

$$D_1 + D_2 = \{d : d = d_1 + d_2,\ d_1 \in D_1, d_2 \in D_2\},$$

$$\lambda D = \{\lambda d,\ d \in D\},\ \lambda \ge 0.$$

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть функция $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируемая на $[t_0, t_1]$ и $f'(t)$ сохраняет знак в этом отрезке.

Тогда существует такое $k_0 \ge 0$, что для любых $k \ge k_0$ функционал $F(t) = e^{kf(t)}$ является выпуклым.

Доказательство. Так как

$$F''(t) = ke^{f(t)}\left[f''(t) + k(f'(t))^2\right] =$$

$$= k(f'(t))^2 e^{kf(t)}\left[\frac{f''(t)}{(f'(t))^2} + k\right]$$

и по условию $f'(t)$ сохраняет знак в $[t_0, t_1]$, будем иметь:

$$\mu = \min_{t\in[t_0,t_1]} \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} > -\infty .$$

Возьмем $k_0 = -\min\{\mu, 0\}$. Тогда ясно, что $F''(t) \ge 0$ для любых $k \ge k_0$, $t \in [t_0, t_1]$, т.е. $F(t)$ выпуклый. Лемма доказана.

Пусть $P_D(x) = \max_{l\in D}(l, x)$, $x \in R^n$ -опорная функция области D. Возьмем параметр $t \in [t_0, t_1]$и предположим, что область D зависит от этого параметра. Обозначим $D = D(t)$, $S(t) = \partial D(t)$, $\lambda(t) = \lambda(D(t))$. Тогда, $\lambda(D(t))$ будет функционалом от $D(t) \in K$ для каждого фиксированного t.

Предположим, что опорная функция $P_{D(t)}(x)$ области $D(t)$ дифференцируема по t.

Теорема1. Пусть производное$P'_{D(t)}(x)$ по t опорной функции $P_{D(t)}(x)$ удовлетворяет условию$P'_{D(t)}(x) > 0$ (или $P'_{D(t)}(x) < 0$) для каждого $t \in [t_0, t_1]$. Тогда функционал $\lambda_j(t)$ является квазивыпуклым.

Доказательство. Возьмем любые $\eta_1, \eta_2 \in [t_0, t_1]$ и обозначим

$$\eta_\alpha = \alpha\eta_1 + (1-\alpha)\eta_2,\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Ясно, что

$$\eta_1 \le \eta_\alpha \le \eta_2 .$$

В [4, 5] получена формула для первой вариации собственного значения $\lambda_j(D)$ относительно $D \in K$ для различных случаев. Для задачи (1), (2) эта формула выглядит так

$$\delta\lambda_j(D) = -\max_{u_j} \int_{S_D} \left|\nabla u_j(x)\right|^2 \left[P_D(n(x)) - P_{D'}(n(x))\right] ds ,$$

где $D, D' \in K$, $n(x)$- внешняя нормаль к S_D в точке x, а $\max$ берется по всем собственным функциям, соответствующим собственному значению λ_j, в случае его кратности. Если λ_j простое собственное значение, то $\max$ перед интегралом отсутствует. Отсюда при $D = D(t)$ имеем

$$\lambda_j(t+\Delta t) - \lambda_j(t) = \lambda_j(D(t+\Delta t)) - \lambda_j(D(t)) =$$

$$= \max_{u_j} \int_{S(t)} \left|\nabla u_j(x)\right|^2 \left[P_{D(t+\Delta t)}(n(x)) - P_{D(t)}(n(x))\right] ds + o(\Delta t).$$

Разделив каждую сторону последнего на Δt и учитывая дифференцируемость $P_{D(t)}(x)$ по t получим

$$\lambda'_j(t) = -\max_{u_j} \int_{S(t)} \left|\nabla u_j(x)\right|^2 P'_{D(t)}(n(x)) ds , \tag{5}$$

где $\quad P'_{D(t)}(x) = \dfrac{dP_{D(t)}(x)}{dt}$.

Отсюда видно, что если $P'_{D(t)}(x)$ сохраняет знак в отрезке $[t_0, t_1]$, то $\lambda_j(t)$ является монотонным. Для определенности предположим, что функционал $\lambda_j(t)$ монотонно возрастает. Тогда

$$\lambda(\eta_\alpha) \le \max\{\lambda(\eta_1), \lambda(\eta_2)\}.$$

А это означает квазивыпуклость $\lambda(t)$. Теорема доказана.

Пример. Пусть

$$D(t) = D_0 + t \cdot D, \ t > 0, \ D_0, D \in K.$$

Тогда по свойству опорных функций [6]

$$P_{D(t)}(x) = P_{D_0}(x) + t \cdot P_D(x).$$

Отсюда получаем

$$P'_{D(t)}(x) = P_D(x).$$

Если $0 \in \operatorname{int} D$, то, по определению опорной функции, $P_D(x) > 0$. А это означает, что, по теореме1, $\lambda(t)$ квазивыпуклый.

Предполагая границу области $D(t)$ достаточно гладкой, можно обеспечить дважды дифференцируемость $\lambda(t)$. Тогда из леммы получается следующая

Теорема2. Пусть $P'_{D(t)}(x)$ сохраняет знак в $[t_0, t_1]$. Тогда существует такое k_0, что функционал $\Lambda(D(t)) \cong \Lambda(t) = e^{k\lambda(t)}$ выпуклый по t для любых $k \ge k_0$.

Действительно, в этом случае из (5) вытекает, что $\lambda'(t)$ сохраняет знак. Это означает, что условия леммы выполняются, т.е. $\Lambda(t) = e^{k\lambda(t)}$ выпуклый.

Следствие. Пусть $D = D(t), \ t \in [t_0, t_1]$ и выполняются условия теоремы 2. Тогда при любых $k \ge k_0$ для собственного значения $\lambda_j(t)$ верна оценка

$$e^{k(\lambda(t) - \lambda(t_0))} \ge Ak(t - t_0) + 1, \tag{6}$$

где

$A = -\int\limits_{S_{D(t_0)}} \left|\nabla u_j^0(x)\right|^2 P'_{D(t_0)}(n(x))ds$, $u_j^0(x)$ - собственная функция задачи (1), (2) в области $D(t_0)$ соответствующая собственному значению $\lambda_j(t_0)$, а k_0 - определяется исходными данными задачи.

Доказательство. Известно [7], что если функция $f(t)$ выпуклый, то при $t \in [t_0, t_1]$ верно

$$f(t) - f(t_0) \geq (f'(t_0), t - t_0).$$

Учитывая это, по теореме2, можем записать

$$e^{k\lambda(t)} - e^{k\lambda(t_0)} \geq -k(t - t_0)e^{k\lambda(t_0)} \int_{S_{D(t_0)}} \left|\nabla u_j^0(x)\right|^2 P'_{D(t_0)}(n(x))ds\,.$$

Разделив каждую сторону на $e^{k\lambda(t_0)}$ получим (6). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gould S.H. Variational methods for eigenvalue problems. Univ. of Toronto Press. London: Oxford Univ. Press, 1996.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988, 512 с.
3. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976, 424с.
4. Нифтиев А.А., Гасымов Ю.С. Управления границей и задачи на собственные значения с переменной области. Изд. БГУ, 2004, 185с.
5. Гасымов Ю.С., Нифтиев А.А. О минимизации собственных значений оператора Шредингера по областям. Доклады РАН, 2001, т.380, №3, с.305-307.
6. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциального анализа. М.: Наука, 1990.
7. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400с.

ŞREDİNGER OPERATORUNUN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN OBLASTDAN QABARIQ ASILILIĞI

Y.S.QASIMOV

XÜLASƏ

İşdə stasionar Şredinger operatoru üçün məxsusi ədəd məsələsinə baxılır. Operatorun verilmə oblastı dəyişən кimi götürülür və məsələnin məxsusi ədədləri oblastdan asılı funкsional кimi öyrənilir. Məxsusi ədədlərin oblastdan qabarıq asılılığına aid nəticələr isbat edilmişdir.

ON A CONVEX DEPENDENCE OF THE EIGENVALUES OF THE SCHRODINGER OPERATOR ON THE DOMAIN

Y.S.GASIMOV

SUMMARY

In the paper an eigenvalue problem for the stationary Schrodinger operator is considered. The domain is taken as a variable and eigenvalues of the considered problem are investigated as a functional depending on the domain. The results are proved concerning to the convex dependence of the eigenvalues on the domain.